数理解析研究所講究録 1205 巻 2001 年 47-52

ジャンケンの計算量

伊藤 暁 (Akira ITO), 井上 克司 (Katsushi INOUE), 王 躍 (Yue WANG)
山口大学工学部知能情報システム工学科
Department of Computer Science and Systems Engineering, Yamaguchi Univ.
岡崎 世雄 (Tokio OKAZAKI)
山口東京理科大学基礎工学部電子基礎工学科
Faculty of Science and Engineering, Science Univ. of Tokyo in Yamaguchi

あらまし N 人がジャンケンをして全員を順位付けるために必要なジャンケン総数の期待値は $\Theta((3/2)^N)$ であり，また最終的に1位の人だけを決めればよい場合に必要なジャンケン回数の期待値も $\Theta((3/2)^N)$ であることを示す．一方，各自が２種類の手しか出せないジャンケンでは，上述の期待値がそれぞれ $\Theta(N)$, $O(\log N)$ となることを示す．

1. まえがき

片手で、石・はさみ・紙の形を互いに出し合って勝負をきめるジャンケンは，江戸寛永の頃（17世紀前期）に中国から伝わった「拳」という遊びから派生したものと考えられている [1]．以下にジャンケンの定義を与える．

定義 1.1 N 人それぞれが，グー，チョキ，パー（“可能手”と呼ぶ）の中から何れかの手を一斉に出す．このとき，各自の勝敗決定規則（“ジャンケン規則”と呼ぶ）は次のとおり：

１種類の手のみ（全員が同じ手）あるいは可能手すべてが出現したときは，勝ち負けなしである（“あいこ”と呼ぶ）．そうでないとき（２種類の手が出現したとき），パーとグーのみならばパーの人は勝ちグーの人は負け，グーとチョキのみならばグーの人は勝ちチョキの人は負け，チョキとグーのみならばチョキの人は勝ちグーの人は負けである． □

本稿では，伝統的かつ誰もが知っているジャンケンの性質を計算量の立場から明らかにする．

近年，決定性アルゴリズムの限界から，素数判定法，零知識証明など確率的アルゴリズムの研究が盛んに行われている．また，インターネットの普及により，分散アルゴリズムの研究も益々重要性を増している．ジャンケンは他人が出す手を予想できないという意味で本質的に確率的であり，また多人数が共通する関心事について決定を下す手段という意味で分散的である．このような側面を持つジャンケンがどのような性質を持っているのかを解明しておくことは有意義と考えられる．

本稿では，① N 個の要素からなる集合が与えられたとき，全要素のある並びをランダムに決める問題（順位付け問題），ならびに② N 個の要素からなる集合が与えられたとき，ランダムに一つの要素を選び出す問題（勝ち抜き問題），の２つの決定問題を取り上げる．第２節では，これらの問題に対するジャンケン手法を用いた通常の解法が，$\Theta((3/2)^N)$ の

0) N 人を順位付け範囲 $[l,h]$, $h=l+N-1$ で順位付けたい（初期状態）.

1) $N=1$ ならば，l を順位として出力し終了.

2) $N\geq 2$ ならば，N 人それぞれが，可能手の中から一つの手をランダムに選ぶ.

3) あいこが生じたならば，同じ順位付け範囲でステップ 1),2) を繰り返す．そうでなく勝ちが i 人負けが $n-i$ 人ならば，順位付け範囲をそれぞれ $[l,l+i-1]$, $[l+i,h]$ として，ステップ 1),2) を繰り返す.

図 1. 順位付けジャンケンのアルゴリズム

期待計算量を持つことを示す．次に，可能手を 2 手に制限した 2 手方式について考察する．これは硬貨を投げて表が出たかどうかで勝敗を決めるコイン投げ方式と等価である．また，通常のジャンケンにおいても誰かが「グーなしよ」などと唱えることで 2 手方式に切り替わる．第 3 節では，2 手方式に基づくジャンケンによって問題 ①, ② を解く場合，それぞれ $\Theta(N)$, $O(\log N)$ の期待計算量を持つことを示す．一般的に確率的アルゴリズムの解析は決定性の場合に比べて困難を伴うが，ここではブートストラッピング法 [4] を無限回適用するという他に見られない近似手法を提供する（定理 3. 2 の証明）.

2. 通常方式

本節では，可能手が 3 種類からなる通常のジャンケンについて考察する．まず，1 回のジャンケンによって決まる勝者人数の確率分布を求める [2].

命題 2. 1 $n\geq 1$ 人が 1 回ジャンケンしたとき i $(1\leq i\leq n)$ 人勝ち残る（$n-i$ 人負ける）確率 $q_{n,i}$ は次式で与えられる：

$$q_{n,i}=\begin{cases}\binom{n}{i}/3^{n-1}, & 1\leq i\leq n-1 \text{ のとき},\\ 1-(2^n-2)/3^{n-1}, & i=n \text{ のとき}.\end{cases}$$

（証明）省略 □

2. 1 順位付けジャンケン

ここでは，N 全員を 1 位から N 位まで順位付けるために必要なジャンケン回数の期待値を求める．図1 はこのアルゴリズムの形式的な記述である.

定理 2. 1 N 人が順位付けジャンケンをしたとき，実行されるジャンケン回数の期待値は $\Theta((3/2)^N)$ である.

（証明） 期待回数を $T(N)$ とおく．順位付けジャンケンのアルゴリズム記述より，

$$T(N) = \begin{cases} 0, & N=1 \text{ のとき}, \\ 3^{N-1}/(2^N-2) + 2/(2^N-2)\sum_{i=1}^{N-1}\binom{N}{i}T(i), & N \geq 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

と表される．以下では，$\underline{(3/2)^N/3 \leq T(N) \leq (3/2)^N 3}$ が成り立つことを示す．
$T(N) \geq (3/2)^N/3$ $(N \geq 2)$ の証明：$1/(2^N-2) \geq 1/2^N$ より，$T(N) \geq 3^{N-1}/(2^N-2) \geq (3/2)^N/3$.
$T(N) \leq (3/2)^N 3$ $(N \geq 1)$ の証明：$N=1,2$ のとき明らか．各 $k<N$ について成り立つものと仮定する．

$$\begin{aligned} T(N) &= 3^{N-1}/(2^N-2) + 2/(2^N-2)\{\sum_{i=2}^{N-1} T(i)\binom{N}{i} + T(1)\binom{N}{1}\} \\ &= 3^{N-1}/(2^N-2) + 2/(2^N-2)\sum_{i=2}^{N-1} T(i)\binom{N}{i} \quad (\because T(1)=0) \\ &\leq 3^{N-1}/(2^N-2) + 6/(2^N-2)\sum_{i=2}^{N-1}(3/2)^i\binom{N}{i} \\ &= 3^{N-1}/(2^N-2) + 6/(2^N-2)\{\sum_{i=0}^{N}(3/2)^i\binom{N}{i} - (3/2)^N - 1 - 3N/2\} \\ &= 3^{N-1}/(2^N-2) + 6/(2^N-2)\{(5/2)^N - (3/2)^N - 1 - 3N/2\} \\ &= 1/(2^N-2)(3^{N-1} + 6/2^N\{5^N - 3^N - 2^N(1+3/2N)\}) \\ &= 1/((2^N-2)2^N)(6^N/3 + 6\{5^N - 3^N - 2^N(1+3/2N)\}) \end{aligned}$$

ここで，帰納法を完成させるには，$6^N/3 + 6\{(5^N - 3^N - 2^N(1+3/2N)\} \leq 3(3/2)^N 2^N(2^N - 2) = 3\cdot 3^N(2^N-2)$ が示されれば良い．これは，$6^N/9 + 2\{(5^N - 3^N - 2^N(1+3/2N)\} \leq 3^N(2^N-2) = 6^N - 2\cdot 3^N$，すなわち $2\cdot 5^N \leq 8/9\cdot 6^N + (1+3/2N)2^{N+1}$，すなわち $5^N \leq 4/9\cdot 6^N + (1+3/2N)2^N$ を意味する．一方下記の事実2.1より，各 $N \geq 2$ に対して，$5^N \leq 4/9\cdot 6^N + (1+3/2\cdot 2)\cdot 2^N \leq 4/9\cdot 6^N + (1+3/2N)2^N$ である．以上により，$k=N$ についても成り立つことが分かる． □

事実 2.1 各 $N \geq 1$ に対して，$5^N \leq 4/9\cdot 6^N + 4\cdot 2^N$.

（証明） 省略． □

上記定理において，より自然な不等式 $T(N) \leq (3/2)^N$ を証明することも可能である．しかしながら議論を複雑にしないために，むしろ次の系のように初期近似 $T(N) \leq (3/2)^N 3$ に対しブートストラッピング法 [4] を適用し近似精度を上げる方が良い．

系 2.1 定理 2.1 のジャンケン回数の期待値 $T(N)$ について，$T(N) \sim (3/2)^N/3$ が成り立つ．*

* 2つの関数 $f(n), g(n)$ について，$f(n) \sim g(n) \iff \lim_{n\to\infty} f(n)/g(n) = 1$. [4].

0) N 人の中から第1位の人を決めたい（初期状態）．

1) $N=1$ ならば，終了．

2) $N \geq 2$ ならば，N 人それぞれが，可能手の中から一つの手をランダムに選ぶ．

3) ジャンケン規則によって勝ちと判定された人全員（あいこならば N 人）について，ステップ 1),2) を繰り返す．

図 2. 勝ち抜きジャンケンのアルゴリズム

（証明）定理で得られた初期近似より，$c_0=3$，$d_0=1/3$ として，

$$
\begin{aligned}
T(N) &\leq 3^{N-1}/(2^N-2)+1/(2^N-2)c_0\sum_{i=1}^{N-1}(3/2)^i\binom{n}{i} \\
&= 3^{N-1}/(2^N-2)+c_0/(2^N-2)\{(5/2)^N-(3/2)^N-1\} \\
&\leq 3^{N-1}/(2^N-2)+c_0/2^{N-1}(5/2)^N \\
&= 3^{N-1}/(2^N-2)+c_1(5/4)^N \\
T(N) &\geq 3^{N-1}/(2^N-2)+d_0/(2^N-2)\{(5/2)^N-(3/2)^N-1\} \\
&\geq 3^{N-1}/(2^N-2)+d_0/2^N(5/2)^N/3 \quad \left(\because \forall N \geq 2[(3/2)^N+1 \leq 2/3(5/2)^N]\right) \\
&= 3^{N-1}/(2^N-2)+d_1(5/4)^N
\end{aligned}
$$

ここに，$c_1=2c_0=6$，$d_1=d_0/3=1/9$．従って，$T(N)-3^{N-1}/(2^N-2)=\Theta((5/4)^N)$．以上により，所望の結果を得る（$N\to\infty$ のとき，$\frac{3^{N-1}/(2^N-2)}{3^{N-1}/2^N}=\frac{2^N}{2^N-2}\to 1$ に注意）． □

2.2 勝ち抜きジャンケン

ここでは，順位付けジャンケンの目標を弱めて，1位の人のみを決めるとした場合のジャンケン回数の期待値を求める．図2はこのアルゴリズムの形式的な記述である．

定理 2.2 N 人が勝ち抜きジャンケンをしたとき，実行されるジャンケン回数の期待値は $\Theta((3/2)^N)$ である．

（証明）省略 □

3. 2手方式

本節では，可能手を2手に制限した方式の場合について考察する．まず，1回のジャンケンで決まる勝者人数の確率分布を求める．

命題 3.1 $n \geq 1$ 人が 1 回ジャンケンしたとき i $(1 \leq i \leq n)$ 人勝ち残る（$n-i$ 人負ける）確率 $q_{n,i}$ は次式で与えられる：

$$q_{n,i} = \begin{cases} \binom{n}{i}/2^n, & 1 \leq i \leq n-1 \text{ のとき}, \\ 1-(2^n-2)/2^n = 1/2^{n-1}, & i = n \text{ のとき}. \end{cases}$$

（証明）命題 2.1 と同様に示される．□

3.1 順位付けジャンケン

ここでは，2 手方式では順位付けジャンケンの計算量が指数関数ではなく線形関数になることを示す．

定理 3.1 2 手方式によって N 人が順位付けジャンケンをしたとき，実行されるジャンケン回数の期待値は $\Theta(N)$ である．

（証明）省略 □

数値実験によれば，上記定理の期待値について $T(N) \sim 1.44\ldots \times N$ と予想される．

3.2 勝ち抜きジャンケン

ここでは，2 手方式では勝ち抜きジャンケンの計算量が対数関数になることを示す．

定理 3.2 2 手方式によって N 人が勝ち抜きジャンケンをしたとき，実行されるジャンケン回数の期待値は $O(\log_2 N)$ である．

（証明）期待回数を $T(N)$ とおく．勝ち抜きジャンケンのアルゴリズム記述より，

$$T(N) = \begin{cases} 0, & N = 1 \text{ のとき}, \\ 2^N/2^N-2)+1/(2^N-2)\sum_{i=1}^{N-1}\binom{N}{i}T(i), & N \geq 2 \text{ のとき}. \end{cases}$$

と表される．

以下では，$\underline{T(N) \leq 2\log_2 N + 4}$ が成り立つことをブートストラッピング法の無限回適用により示す．

まず，定理 3.1 の証明より，$T(N) \leq 2N$ は明らか．この近似式より，

$$\begin{aligned} T(N) &\leq 2+1/(2^N-2)\sum_{i=1}^{N-1} 2i\binom{N}{i} \\ &= 2+N \\ T(N) &\leq 2+1/(2^N-2)\sum_{i=1}^{N-1}(2+i)\binom{N}{i} \\ &= 4+N/2 \\ T(N) &\leq 2+1/(2^N-2)\sum_{i=1}^{N-1}(4+i/2)\binom{N}{i} \end{aligned}$$

表 1. ジャンケンの計算量（期待回数）

方式	3 手方式	2 手方式
順位付けジャンケン	$\Theta((3/2)^N)$	$\Theta(N)$
勝ち抜きジャンケン	$\Theta((3/2)^N)$	$O(\log N)$

$$= \quad 6 + N/4$$
$$\vdots$$

このように前段で得られた近似式を代入して次の近似式を得るという手続きを繰り返せば，無数の近似式

$$T(N) \le 2(k+1) + N/2^k \quad (k \ge 0)$$

を得る．従って，N が与えられたとき，これらのうちから任意のものを選ぶことができる．特に $k = \lceil \log_2 N \rceil$ と選ぶと，

$$T(N) \le 2\lceil \log_2 N \rceil + 3 \le 2\log_2 N + 4$$

を得る． □

数値実験によれば，上記定理の期待値について $T(N) \sim 1.58\ldots \times \log_2 N$ と予想される．

4. むすび

本稿では確率的アルゴリズムとして最も身近な対象と考えられるジャンケンの計算量解析を行った（表 1 参照）．更に近似の精度を上げること，平均値だけでなく分散値を求めることが課題である．本稿では，通常の 3 手方式ならびに 2 手方式を取り上げたが，5 手方式など可能手が多い場合について考察することも興味深い．

参考文献

[1] 市古他編，国語大辞典（新装版），小学館 (1988).

[2] 青木芳文，数学の部屋
http://web2.incl.ne.jp/yaoki/index.htm (2000).

[3] M. Hofri, Probabilistic Analisis of Algorithms, Springer-Verlag, NY (1987).

[4] R. Graham, D. Knuth, O. Patashnik, 有澤他訳, コンピュータの数学, 共立出版 (1993).